

Filtros Morfológicos por Pendiente basados en Criterios de Gradiente Ponderado

Jorge D. Mendiola- Santibañez¹, Iván R. Terol-
Villalobos²

¹Doctorado en Instrumentación y Mecatrónica de la
Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de
Querétaro, Centro Universitario, Cerro de las
Campanas S/N, APDO 76000, Qro., México.

²CIDETEQ, SC, Parque Tecnológico Querétaro S/N,
Sanfandilia-Pedro Escobedo, C.P. 76700-APDO 064,
Qro. México. E-mail: famter@ciateq.net.mx

Resumen

El presente artículo, tiene como objetivo principal la modificación del criterio de gradiente en los filtros morfológicos por pendiente mediante el uso de funciones ponderadoras. La finalidad de estas funciones es ponderar al gradiente para modificar su comportamiento y así detectar varias zonas dentro de la imagen como de alto o bajo contraste de acuerdo a las características de la función propuesta. De esta manera, la ponderación del gradiente en los filtros morfológicos por pendiente surge como una posibilidad importante para mejorar el contraste en las imágenes de salida. Finalmente se plantea el uso de transformaciones conexas basadas en la noción de partición y zona plana.

Palabras clave. Gradiente morfológico, gradiente ponderado, filtros morfológicos por pendiente, morfología sobre particiones, contraste morfológico.

1. Introducción

Dentro de la morfología matemática, uno de los tópicos de interés es el estudio del contraste morfológico. El contraste morfológico fue inicialmente estudiado por Meyer y Serra [1] mediante los mapeos de contraste morfológicos. Estos mapeos, basan su funcionamiento en la modificación de la imagen de entrada mediante primitivas bajo un criterio de proximidad. Por otra parte; surge una clase de filtros no crecientes denominados filtros morfológicos por pendiente (FMP) [2,3,4]. Este tipo de filtros usan el criterio de pendiente para modificar a las imágenes y obtener un buen

contraste. Al aplicar estos filtros, las zonas de la imagen con pendientes débiles son eliminados y zonas con pendientes fuertes son mantenidas como regiones de alto contraste. La detección de contraste en las diferentes regiones de la imagen, se lleva a cabo al aplicar los conceptos de gradientes morfológicos [5][6]. Los FMP se definen como mapeos de contraste, al igual que los propuestos por Serra y Meyer; pero con diferencias significativas. Por ejemplo, los FMP al ser iterados, no comparan una función f con diferentes patrones de la imagen original, sino que retienen zonas de alto contraste y eliminan aquellas donde el gradiente es débil. También los FMP involucran dos parámetros importantes durante su iteración; la talla del elemento estructural del gradiente y una constante ϕ como el valor de la pendiente; por lo tanto, es posible encontrar diferentes descriptores de la imagen de entrada al variar dichos parámetros. Por otra parte, Terol [7] propone la ponderación del gradiente en los FMP; esto, con la finalidad de mostrar que al tener un control sobre el mismo, se puede influir de manera sustancial en el resultado final. En el presente trabajo, la propuesta gira alrededor de la ponderación del gradiente. Básicamente, se manipula al gradiente por medio de una función o composición de funciones; las cuales refuerzan o atenúan los contornos detectados. Entre las funciones propuestas, se presenta una función en particular de sumo interés y que corresponde a la ley de Weber [8]. Esta es una ley física de contraste y se encuentra descrita por un logaritmo. Otra parte fundamental de este trabajo, esta basado en el formalismo de las diferentes expresiones morfológicas ya que se definirán sobre el concepto de partición y zona plana [9]. Al trabajar con estos conceptos, se asegura que las diferentes transformaciones propuestas son conexas; es decir, no hay generación de nuevos contornos en la imagen de salida, solo se extienden o desaparecen las zonas planas. Finalmente, este artículo esta organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta la definición de zona plana, así como las transformaciones morfológicas sobre partición, mientras que en la sección 3, se proponen las diferentes funciones que ponderan al gradiente y se comparan los resultados de las imágenes de salida a nivel partición y a nivel pixel.

2. Conectividad y Morfología Sobre Partición

2.1. Nociones Básicas de Conectividad y Zona Plana

La noción de conectividad es un concepto definido en topología que se establece también bajo otra forma en la teoría de grafos. Esta noción tiene importantes aplicaciones en procesamiento de imágenes por computadora: las componentes conexas de una imagen corresponden a sus diferentes

partes que la componen. En el caso puramente digital la noción de trayectoria arco-conexa permite definir una componente conexa. Una trayectoria arco-conexa P entre dos puntos x, y es una secuencia de puntos, $p_1, p_2, \dots, p_n$, tal que $p_1 = x$, y $p_n = y$, y para todo i (p_i, p_{i+1}) son vecinos. De esta forma, una componente A es arco-conexa si para todo par de píxeles x, y en A , existe una trayectoria completamente incluida en A uniendo x e y . La existencia de una nueva definición de conectividad permitiría separar de otra manera un objeto en sus diferentes partes conexas. Esta es una de las razones que originó la definición de conectividad en morfología matemática. La conectividad fue establecida por Serra [10], por medio del concepto de clase conexa. Esta noción de conectividad generó el concepto de zona plana. El concepto de zona plana es muy importante porque permite definir las componentes conexas en imágenes binarias, así como en imágenes numéricas. Esta noción se expresa en la siguiente definición.

Definición 1. Las zonas planas de una función $f: Z^2 \rightarrow Z$ se definen como las componentes conexas (más grandes) de puntos con el mismo valor de la función.

En la figura 1(a), se muestra una imagen conteniendo 5 zonas planas, mientras que la Fig. 1(b) y 1(c) ilustra las componentes conexas obtenidas por el operador $F_x(f)$, $F_y(f)$. Observe que la noción de zona plana genera una partición de la imagen puesto que verifica las siguientes condiciones: (a) La unión de zonas planas recubre completamente el dominio de la imagen, (b) Si la intersección de dos zonas planas diferentes es el vacío; las zonas planas son disjuntas. En particular, todo punto x pertenece exactamente a un elemento de la partición. De este modo, es posible usar ambos conceptos sobre particiones: noción de zona plana que genera la partición y las transformaciones morfológicas que trabajan a nivel de vecindades. Para definir la noción de vecindad sobre la partición generada por la noción de zona plana se requiere definir la adyacencia entre elementos de la partición.

Definición 2. Dos zonas planas $F_x(f)$ y $F_y(f)$ en Z^2 se dicen adyacentes si la unión de las dos zonas planas $F_x(f) \cup F_y(f)$ es una componente conexa.

En la figura 1(d) se ilustra la noción de zonas planas adyacentes. La unión de las dos zonas planas adyacentes $F_x(f)$, $F_y(f)$ forma una componente conexa. De esta forma, el conjunto de zonas planas adyacentes a una zona plana se define a continuación.

Definición 3. Sea x un punto de Z^2 , el conjunto de zonas planas A_x adyacentes a F_x está dado por: $A_x = \{ F_{x'} : x' \in Z^2, F_x \cup F_{x'} \text{ es conexa} \}$.

Finalmente, dado que trabajaremos con operadores conexos, utilizaremos la siguiente definición.

Definición 4. Un operador ψ es conexo si y sólo si extiende las zonas planas de la imagen de entrada.



Figura 1. (a) Imagen f con 5 zonas planas, (b) Zona plana en el punto x , $F_x(f)$, (c) Zona plana en el punto y , $F_y(f)$, (d) zonas planas adyacentes.

2.2. Transformaciones Morfológicas Sobre Partición

Los operadores morfológicos descritos en esta sección van a operar sobre el par (f, P_f) . Se define entonces el elemento $(f, P_f)(x)$ como el valor de nivel de gris de la componente conexa $F_x(f)$. La dilatación y erosión morfológicas aplicadas sobre las zonas planas están dadas por:

$$\begin{aligned}\delta((f, P_f))(x) &= \max\{(f, P_f)(y), F_y \in A_x \cup \{F_x\}\} \\ \varepsilon((f, P_f))(x) &= \min\{(f, P_f)(y), F_y \in A_x \cup \{F_x\}\}\end{aligned}\quad (1)$$

donde $\max$ y $\min$ representan los valores máximo y mínimo. De este modo, el valor de la dilatación o de la erosión en la zona plana F_x estará dado por el máximo o el mínimo nivel de gris, respectivamente, de los niveles de gris de las zonas planas adyacentes A_x y F_x . Puesto que la noción de elemento estructurante no existe en los operadores morfológicos sobre particiones, este elemento es eliminado de las definiciones de la dilatación y de la erosión. La dilatación y la erosión de tamaño λ se obtienen iterando λ veces la dilatación y la erosión elemental:

$$\delta_\lambda((f, P_f))(x) = \underbrace{\delta \delta \dots \delta}_{\lambda \text{ veces}}((f, P_f))(x) \text{ y } \varepsilon_\lambda((f, P_f))(x) = \underbrace{\varepsilon \varepsilon \dots \varepsilon}_{\lambda \text{ veces}}((f, P_f))(x) \quad (2)$$

Por medio de la erosión y de la dilatación sobre zona plana, el gradiente externo y el gradiente interno pueden ser expresados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\text{grade}((f, P_f))(x) &= \delta((f, P_f))(x) - (f, P_f)(x) \\ \text{gradi}((f, P_f))(x) &= (f, P_f)(x) - \varepsilon((f, P_f))(x)\end{aligned}\quad (3)$$

Igualmente, utilizando la dilatación y la erosión se define la apertura y la cerradura sobre la partición inducida por f como:

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda((f, P_f))(x) &= \delta_\lambda((\varepsilon_\lambda(f, P_f), P_f))(x) \\ \varphi_\lambda((f, P_f))(x) &= \varepsilon_\lambda((\delta_\lambda(f, P_f), P_f))(x)\end{aligned}\quad (4)$$

2.3. Breve Recapitulación de los Filtros Morfológicos por Pendiente (FMP)

Los FMP son filtros de contraste morfológico no crecientes. Se construyen con transformaciones morfológicas básicas (erosión y dilatación) y el gradiente morfológico. Las versiones de gradiente empleadas en estos filtros son el gradiente externo y el gradiente interno (ver ecuación 3). Se iteran en base de un criterio de pendiente (ϕ) para modificar la imagen y obtener un buen contraste. La definición de estos filtros sobre partición [7] se muestra a continuación:

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(f)(x) = \begin{cases} \varepsilon((f, P_f))(x) & \text{si } \text{gradi}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \text{gradi}((f, P_f))(x) > \phi, \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi_{\phi}^{\delta 1}(f)(x) = \begin{cases} \delta((f, P_f))(x) & \text{si } \text{grade}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \text{grade}((f, P_f))(x) > \phi, \end{cases}$$

En el enésimo paso cuando la estabilidad es alcanzada ($n \rightarrow \infty$):

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(\xi_{\phi}^{\varepsilon n-1}((f, P_f))(x)) \quad \text{y} \quad \xi_{\phi}^{\delta n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\delta 1}(\xi_{\phi}^{\delta n-1}((f, P_f))(x))$$

Las primitivas de estos filtros son la erosión y la función original (ó dilatación y función original). El parámetro ϕ hace que estos filtros trabajen como mapeos de contraste [1][11]; sin embargo existen algunas diferencias a considerar; por ejemplo, la idea de los FMP no es comparar una función con diferentes patrones, mas bien, atenuar o retener zonas de acuerdo a la información proporcionada por el gradiente. En la Figura 2 se ilustra con imágenes de salida el comportamiento de los FMP a nivel píxel y sobre partición.

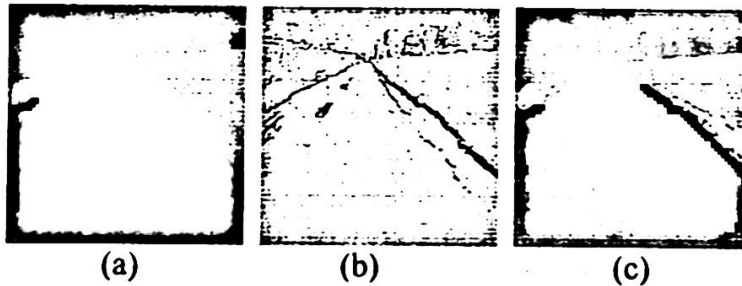


Figura 2. (a) Imagen original, (b) FMP a nivel píxel con $\phi = 10$, (c) FMP a nivel partición con $\phi = 10$.

Teniendo en consideración la forma de actuar de estos filtros, en la siguiente sección se presenta la propuesta de este trabajo, la cual consiste en ponderar al gradiente morfológico para tener un control sobre el y poder contrastar en las imágenes de salida.

3. Ponderación del Criterio de Gradiente en los FMP Sobre Partición

3.1. Definición de los FMP Ponderados

La idea de ponderar el gradiente en los FMP surge en [7]; sin embargo esta propuesta aun no ha sido estudiada adecuadamente. En este artículo se proponen los FMP con gradiente ponderado. La idea consiste en cambiar el criterio de gradiente con la finalidad de que el criterio de proximidad permita detectar y contrastar zonas con determinados niveles de intensidad. De esta manera, la modificación del criterio de gradiente en los FMP surge como una alternativa importante para controlar el contraste en las imágenes de salida. En la siguiente expresión se definen los FMP ponderados por una función $\chi(t)$ los cuales se definen de manera general como filtros morfológicos por pendiente ponderados (FMPP):

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(f)(x) = \begin{cases} \varepsilon((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t) \text{gradi}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t) \text{gradi}((f, P_f))(x) > \phi \end{cases} \quad (6)$$

$$\xi_{\phi}^{\delta 1}(f)(x) = \begin{cases} \delta((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t^c) \text{grade}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t^c) \text{grade}((f, P_f))(x) > \phi \end{cases}$$

Donde t toma los valores de intensidad de las diferentes zonas planas dentro de la imagen, esto es $t = (f, P_f)(x)$ y $t^c = (f^c, P_f)(x)$. En el enésimo paso cuando la estabilidad es alcanzada ($n \rightarrow \infty$):

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(\xi_{\phi}^{\varepsilon n-1}((f, P_f))(x)) \quad \text{y} \quad \xi_{\phi}^{\delta n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\delta 1}(\xi_{\phi}^{\delta n-1}((f, P_f))(x))$$

Entonces la función $\chi(t)$ multiplica al gradiente y por lo tanto este efecto se notará en el resultado final. La función ponderadora $\chi(t)$ puede ser modificada si se considera un parámetro de corrimiento ς ($\varsigma \in \mathbb{N}$); es decir

$\chi(t - \varsigma)$. El parámetro de corrimiento origina que la función $\chi(t)$ sea desplazada respecto al origen. Por lo tanto se mantiene la forma original de la función $\chi(t)$; pero el criterio de gradiente será ponderado de diferente forma al ser multiplicado por esta nueva función. Una vez definido el parámetro de corrimiento $\varsigma (\varsigma \in \mathbb{N})$ se introducen los FMP ponderados con corrimiento (FMPPC). Los filtros FMPP con corrimiento cumplen lo siguiente: i) el criterio de gradiente trabaja si $(t - \varsigma) \geq 0$ y ii) para cada valor de corrimiento, el gradiente es ponderado con funciones diferentes. La expresión matemática de los filtros morfológicos por pendiente ponderados con corrimiento es la siguiente:

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(f)(x) = \begin{cases} \varepsilon((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t - \varsigma) \text{gradi}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t - \varsigma) \text{gradi}((f, P_f))(x) > \phi, \end{cases} \quad (7)$$

$$\xi_{\phi}^{\delta 1}(f)(x) = \begin{cases} \delta((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t^c - \varsigma) \text{grade}((f, P_f))(x) \leq \phi \\ ((f, P_f))(x) & \text{si } \chi(t^c - \varsigma) \text{grade}((f, P_f))(x) > \phi, \end{cases}$$

En el enésimo paso cuando la estabilidad es alcanzada ($n \rightarrow \infty$):

$$\xi_{\phi}^{\varepsilon n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\varepsilon 1}(\xi_{\phi}^{\varepsilon n-1}((f, P_f))(x)) \quad \text{y} \quad \xi_{\phi}^{\delta n}((f, P_f))(x) = \xi_{\phi}^{\delta 1}(\xi_{\phi}^{\delta n-1}((f, P_f))(x))$$

Cuando $\varsigma = 0$, los FMP ponderados por corrimiento se reducen a la forma de los FMP ponderados por la función $\chi(t)$.

En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos de funciones para la ponderación del criterio de gradiente. Primero se propone la modificación del criterio de gradiente mediante una ley física de contraste conocida como ley de Weber[8]. Después se proponen algunas funciones que permitan el realce del contraste en oscuro y en claro para ciertas regiones con determinados niveles de intensidad.

3.2. Ejemplos de Funciones para la Ponderación del Gradiente en los FMP

La primera función propuesta consiste en obtener una ponderación de los FMP usando una ley física conocida como ley de Weber. Esta ley física permite utilizar un modelo logarítmico [8] mediante el cual se mejora el contraste en una imagen al cambiar la luminancia del objeto. El modelo

gráfico de contraste logarítmico se presenta en la Figura 3. La expresión matemática de esta ley logarítmica es la siguiente:

$$C = a_1 + a_2 \log f \quad \text{donde } a_1, a_2 \text{ son constantes}$$

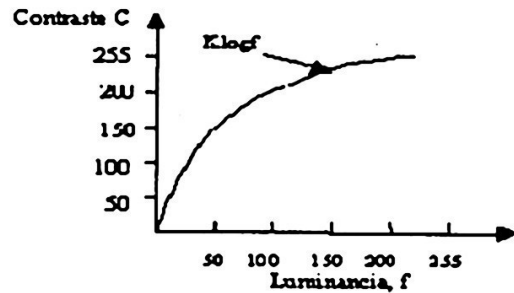


Figura 3. Modelo de contraste logarítmico.

La ley logarítmica puede escribirse como:

$$C = K \log_{10} f \quad 1 \leq f \leq m \quad \text{si } a_1 = 0 \text{ y } a_2 = K \quad (8)$$

Este concepto físico puede emplearse para mejorar el contraste en imágenes digitales. Considerando el modelo de contraste anterior y los FMP descritos en la sección 3.1, las siguientes funciones $\chi(t)$ y $\chi(t-\zeta)$ se proponen como ponderadores. De esta manera se definen los FMPP por logaritmo y por corrimiento de logaritmo respectivamente:

$$\chi(t) = K \log_{10}(t) \quad \text{y} \quad \chi(t-\zeta) = K \log_{10}(t - \zeta) \quad \text{donde } t = (f, P_f)(x) \quad (9)$$

El valor de la constante K se calcula tomando en cuenta las siguientes consideraciones: si el contraste inicial es 0 entonces: $C = a_2 \log \chi$ con $a_1 = 0$. De esta manera, si $C = 255$ y suponiendo que el valor más grande tomado por el gradiente y la imagen original es 255, tenemos que:

$$255 = 255 \times K \log_{10} 255 \quad \text{y} \quad K = 1/(\log_{10} 255) \approx 0.41,$$

El corrimiento del logaritmo se ilustra en la Figura 4 donde el parámetro de corrimiento $\zeta \in [1, 255]$.

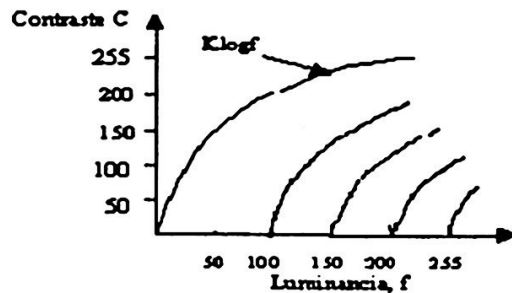


Figura 4. La aplicación del parámetro de corrimiento a la función logaritmo, permite el manejo de diferentes funciones para ponderar al gradiente.

Cuando el parámetro de corrimiento cambia, el gradiente es ponderado de diferente manera y de esta forma las primitivas de los FMPP por logaritmo actuarán de otro modo sobre las regiones de la imagen de entrada. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 5. En las figuras de la 5(b)-5(c) se presentan dos imágenes de salida después de iterar los FMP ponderados por corrimiento de logaritmo. Además puede compararse el desempeño a nivel partición y a nivel pixel. La imagen de salida correspondiente a la Figura 5(d) muestran el resultado de iterar los FMP ponderados por corrimiento de logaritmo a nivel pixel. El incremento en el parámetro ς origina que regiones de nivel de intensidad mas claro sean iteradas, dando origen a que nuevas regiones sean ponderadas como zonas de alto contraste.

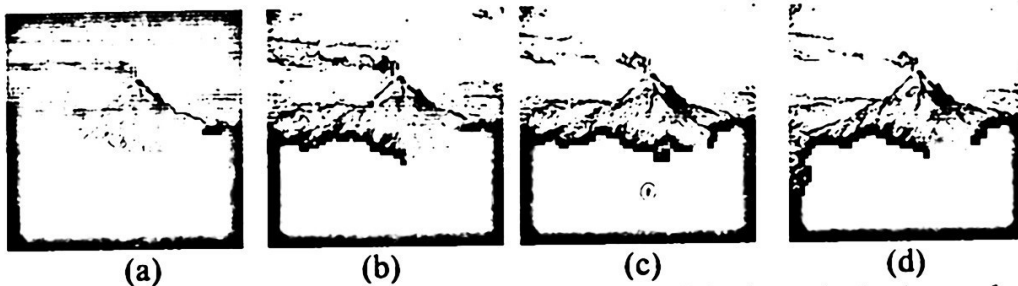


Figura 5. (a) Imagen original, (b) Imágenes de salida después de iterar los FMPP por la ley logarítmica con corrimiento sobre partición, $\varsigma = 50, 80$ con $\phi=5$, (d) Imagen de salida después de iterar los FMPP por la ley logarítmica con corrimiento a nivel pixel, con $\varsigma = 80$ y $\phi=5$.

A continuación se propone otra función, la cual pondera al gradiente con la finalidad de contrastar regiones claras y oscuras.

$$f(x) = \sqrt{A - Bx} \quad (10)$$

La gráfica de esta fórmula se muestra en la Figura 6. Considerando la ecuación 11, se definen los FMPP por SQRT con y sin corrimiento respectivamente; las ecuaciones correspondientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \sqrt{1 - \frac{t}{255}} \\ \chi(t - \varsigma) &= \sqrt{1 - \frac{(t - \varsigma)}{255}} \quad \text{con } t = (f, P_f)(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Con este criterio de gradiente, las zonas claras y oscuras serán ponderadas como zonas de alto contraste y por tanto, serán mantenidas cuando los FMPP por SQRT sean iterados. Algunos ejemplos se muestran en las imágenes de la Figura 7.

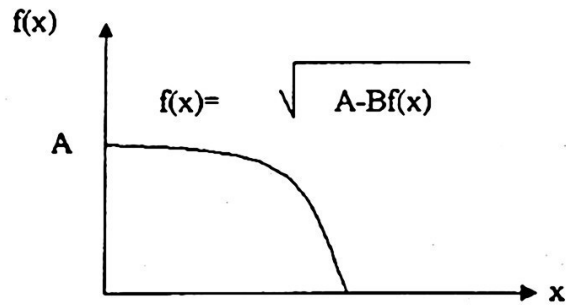


Figura 6. Función ponderadora para contrastar regiones claras y oscuras.

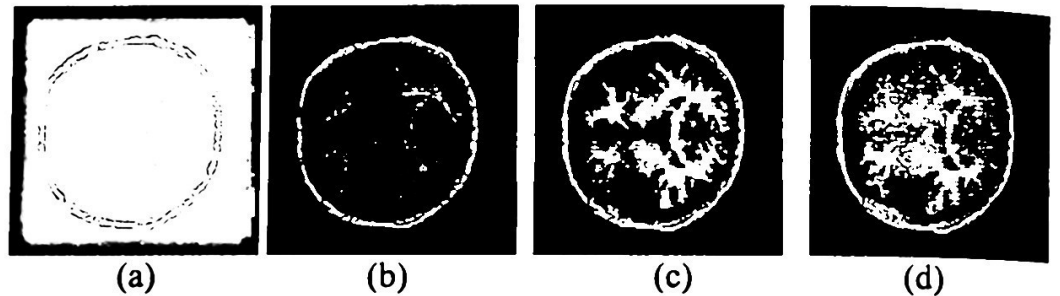


Figura 7. (a) Imagen original, (b),(c) Imágenes de salida después de iterar FMPP por SQRT con corrimiento sobre partición, $\varsigma = 100, 140$ con parámetro $\phi = 10$, (d) Imagen de salida después de iterar FMPP por SQRT con corrimiento a nivel pixel, $\varsigma = 140$ con parámetro $\phi = 10$.

En las Figuras 7(b)-(c) han sido tratadas al mismo tiempo regiones claras y oscuras a nivel partición. Al comparar la Fig. 7(c) con la Fig. 7(d), se observa un mejor comportamiento cuando las imágenes son tratadas a nivel partición. De la ecuación (11) nótese que la función ponderadora toma el valor de cero cuando t toma el máximo valor de intensidad dentro de la imagen. Lo interesante de esta transformación es el hecho de actuar sobre regiones claras y oscuras al mismo tiempo.

Hasta ahora no se ha propuesto ninguna función para contrastar regiones claras. A continuación se da una función como ejemplo. La formulación matemática de las funciones $\chi(t)$ y $\chi(t-\varsigma)$ se presenta en la ecuación 12. Estas funciones permiten definir los FMPP por función absoluto con y sin corrimiento.

$$\chi(t) = \text{abs}(1 - \log_{10}(t)) \log_{10}(t) \quad (12)$$

$$\chi(t - \varsigma) = \text{abs}(1 - \log_{10}(t - \varsigma)) \log_{10}(t - \varsigma) \quad \text{con } t = (f, P_f)(x)$$

La gráfica de puntos que pondera al gradiente interno se muestra en la Figura 8. En la figura 9 se ilustra el comportamiento de este filtro.

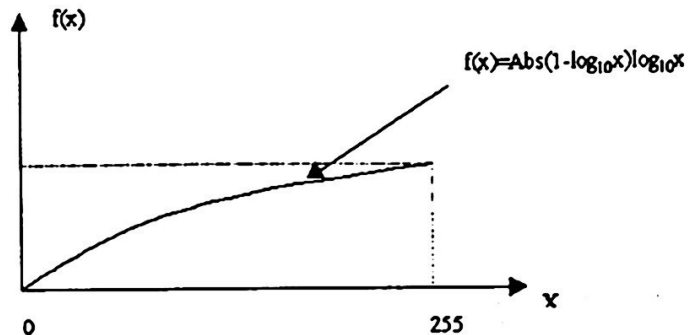


Figure 8. Gráfica propuesta para la ponderación del gradiente interno para contrastar regiones claras.

En la Figura 9 nótese el efecto de aplicar este filtro. Las regiones claras han sido retenidas y por lo tanto se modifica el contraste en las imágenes de salida. Cuando el parámetro de corrimiento aumenta, muchas otras regiones son ponderadas como regiones claras.

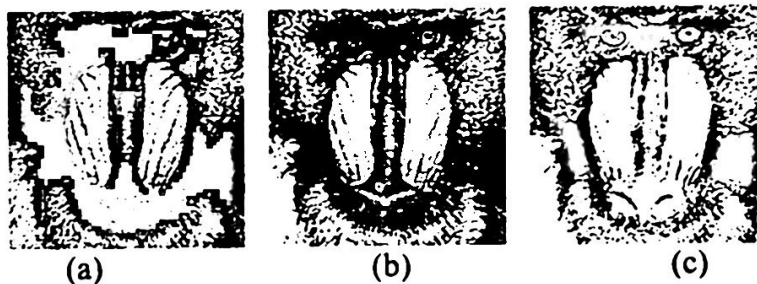


Figura 9. (a) Imagen original, (b) Imagen de salida después de iterar los FMPP por función absoluto con corrimiento sobre partición, $\zeta = 50$ con $\phi=10$, (f) Imagen de salida después de iterar FMPP por función absoluto con corrimiento a nivel pixel, $\zeta = 50$ con $\phi=10$.

4. Conclusión

En este trabajo se muestra el interés de ponderar el gradiente en los Filtros morfológicos por pendiente con la finalidad de tener control en el contraste de las imágenes de salida. La ponderación se realiza al multiplicar el gradiente por una función sugerida y de esta forma modificar el criterio de gradiente. La modificación de este criterio, permite obtener resultados interesantes; tal es el caso de los FMPP por logaritmo. Sin embargo la ponderación del gradiente debe ser acorde con el problema a resolver. Por otra parte las transformaciones que se definen en este trabajo son conexas.

Agradecimientos. El autor Jorge D. Mendiola Santibañez agradece a CONACyT por la beca de doctorado otorgada. El autor Terol-Villalobos agradece a Diego R. y a Darío T.G. por la motivación en el desarrollo de

este trabajo. Parte de este trabajo ha sido realizado dentro de la red VII de Telemedicina e Informática Médica financiada por el CyTED (España).

Referencias

- [1] Meyer, F. and Serra, J.. "Activity Mappings" *Signal Processing*, 16, 1989, pp.303-317.
- [2] Terol-Villalobos, I. R., "Nonincreasing filters using morphological gradient criteria", *Optical Engineering*, 35, 1996, pp. 3172-3182.
- [3] Terol-Villalobos, I. R. y Cruz-Mandujano, J.A. "Contrast enhancement and image segmentation using a class of morphological nonincreasing filters", *Journal of Electronic Imaging*, 7, 1998 ,641-654.
- [4] Terol-Villalobos, I. R., "Toggle mappings and some related transformations: A study of contrast enhancement", in *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, H.J.A.M. Heijmans and J.B.T.M. Roerdink , Eds., Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1998, pp. 11-18.
- [5] Beucher S., "Segmentation d'Images et Morphologie Mathématique", PhD Thesis , Centre de Morphologie Mathématique. ENSMP, Fontainebleau, France (1990).
- [6] Rivest J.F., Soille P., and Beucher S., "Morphological gradients", *J.Electron Eng.* 2(4), 326-336(1993).
- [7] Terol-Villalobos, I.R., "Morphological Image Enhancement and Segmentation", en *Advances in Imaging and Electron Physics*, Editor Peter W. Hawkes, Vol. 118, capítulo 4, Academic Press, septiembre, 2001, pp. 207-273.
- [8] Jain, A., K., *Fundamentals of Digital image Processing*, Vol. I, Prentice Hall Information International, USA, 1989.
- [9] Mendiola-Santibañez J.D y Terol-Villalobos, I. R., "Morphological Contrast Enhancement using Connected Transformations", en *Proceedings of SPIE*, Vol. 4667, pp. 365-376 (2002).
- [10] Serra, J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, J. Serra, Ed., Vol. II, Academic, New York, 1988.
- [11] Serra, J., "Toggle Mappings" *Technical report N-18/88/MM*, Centre de Morphologie Mathématique, ENSMP, Fontainebleau, France, 1988.